Matemática Aplicada

1 Em 2014, durante uma campanha para vacinar a população contra determinado tipo de hepatite, o Ministério da Saúde estimou que o custo para vacinar x% da população é dado pela função $f(x)=\dfrac{360x}{450-x}$ milhões de reais.

A Do ponto de vista estritamente matemático, qual é o domínio da função $f(x)$?

B Para quais valores de x a função $f(x)$ tem significado nesse contexto da campanha de vacinação?

C Qual é o custo para vacinar 50% da população e o custo para vacinar os 50% restantes da população? Aproxime a resposta ao número inteiro de milhões de reais mais próximo.

D Que porcentagem da população terá sido vacinada após terem sido gastos 90 milhões de reais?

Solução

A O domínio da função $f(x)$ é o conjunto de todos os números reais x para os quais $x \neq 450$.

B Para todos os números reais x tais que $0 \leq x \leq 100$.

C $f(50)=45$ milhões de reais
$f(100)-f(50)=102{,}86-45=57{,}86;58$ milhões de reais

D $90=\dfrac{360x}{450-x}$; 90% da população

2 Em uma fábrica, o custo de produção de x unidades de certo produto é dado pela função $f(x)=x^2+\log x^{90}+10000$ reais. Estima-se que são fabricadas $x=10t$ unidades durante t dias de trabalho.

A Qual é o custo de produção nos primeiros oito dias de trabalho, aproximadamente? Considere que $10^{0,3}=2$.

B Quantos dias de trabalho são necessários para que o custo de produção atinja exatamente o valor de R$ 20 180,00? Considere que, neste caso, $\log x$ é um número natural.

Solução

A x = 10.8 = 80 unidades
$f(80)=80^2+90(3\log 2+\log 10)+10000=6400+90(0{,}9+1)+10000=R\$16571{,}00$

B Como é dado que $\log x$ é um número natural, por tentativa temos que x=100:
$100^2+90.\log 100+10000=20180$; R$ 20 180,00
Como x = 10 t, temos t = 10.
Serão necessários 10 dias de trabalho.

3 No Teatro da Imaginação, um mágico pediu que uma senhora subisse ao palco para fazer um truque. Solicitou que multiplicasse o dia do seu nascimento por 12, o mês do nascimento por 31 e somasse os dois produtos. A senhora disse-lhe somente o resultado da soma: 184.

O mágico anotou algo em uma folha de papel, pensou por alguns instantes e falou:

"A senhora nasceu no dia 5 de abril."

A data estava certa.

Justifique a resposta do mágico.

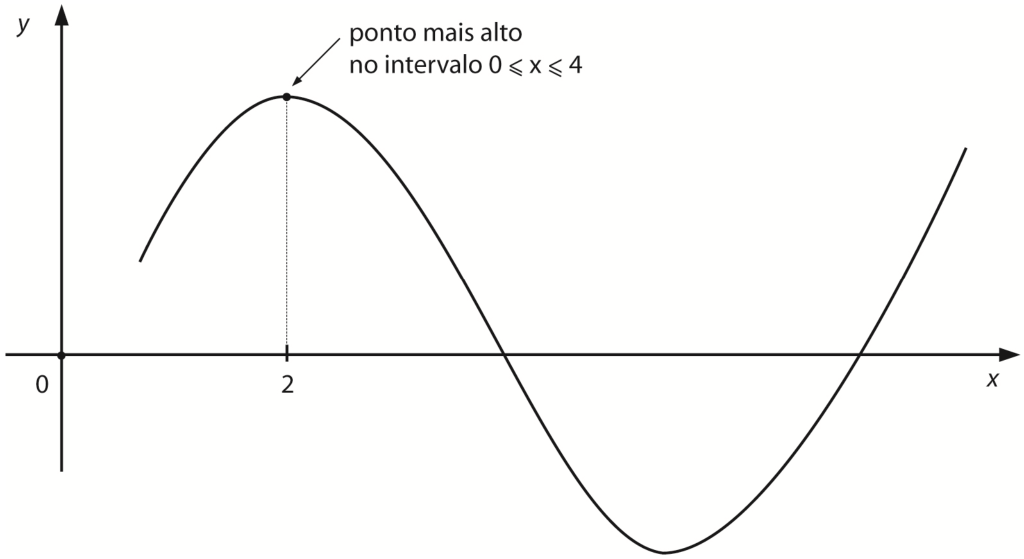
Solução

Se x é o mês do nascimento e y o dia do nascimento, podemos obter a equação indeterminada: $31x + 12y = 184$, em que x e y são números inteiros tais que $1 \le x \le 12; 1 \le y \le 31$. Portanto:

$$y = \frac{184 - 31x}{12}$$

Por substituição encontramos o mês x = 4 e o dia y = 5.

4 A figura mostra um esboço simples do gráfico da função $f(x) = x^3 - 18x^2 + 60x - 16$.



A Sem determinar suas raízes, explique por que a equação $x^3 - 18x^2 + 60x - 16 = 0$ não tem nenhuma raiz complexa.

B Sem determinar suas raízes, explique por que a equação $x^3 - 18x^2 + 60x - 16 = 0$ tem três raízes reais e positivas.

C Um fabricante estima que, se o preço de certo tipo de apontador escolar for x reais a unidade, $0 < x \leq 4$, os consumidores comprarão $x^2 - 18x + 60$ unidades por mês. A que preço deve ser vendido cada apontador para que o fabricante obtenha a maior receita mensal possível?

D Quantos apontadores deverão ser vendidos por mês a esse preço?

Solução

A A equação tem três raízes. Como a figura indica que o gráfico de $f(x)$ corta o eixo x ao menos duas vezes, a equação tem pelo menos duas raízes reais. Se tivesse uma raiz complexa, como os coeficientes da equação são números inteiros, admitiria também como raiz a sua conjugada. E assim teria quatro raízes, o que é absurdo.

B Como $f(0) = -16$, a função intercepta o eixo x em mais um ponto em que x > 0. Ou seja, a equação tem três raízes reais e positivas.

C O ponto mais alto da função receita $R(x) = x(x^2 - 18x + 60) = x^3 - 18x^2 + 60x$ no intervalo dado é o mesmo da função do gráfico. Portanto: x = 2; R$ 2,00.

D 2^2-18(2)+60 = 28 apontadores

5 Um grupo de trabalhadores foi contratado para pintar as superfícies de duas quadras de voleibol, uma com o dobro da área da outra. Nas quatro primeiras horas, o grupo trabalhou na quadra maior. Depois, foi dividido em dois grupos iguais: o primeiro permaneceu na quadra maior e terminou o trabalho nas 4 horas seguintes. O segundo grupo ficou na quadra menor, mas após 4 horas ainda não havia terminado a pintura. No dia seguinte, a parte que faltava foi terminada por um único trabalhador após 8 horas de trabalho.

Quantos operários havia no grupo?

Solução

Seja x o número de trabalhadores do grupo e y, a superfície pintada por um único trabalhador após 8 horas de trabalho.

Área da superfície pintada após 4 horas: $\frac{xy}{2}$.

Área da superfície pintada da quadra maior nas 4 horas seguintes: $\frac{xy}{4}$.

Área da superfície da quadra menor pintada nas 4 horas desse dia: $\frac{x}{2}.\frac{y}{2}=\frac{xy}{4}$.

Área da superfície pintada por um único trabalhador no dia seguinte: $1.y$

Como a superfície de uma quadra é o dobro da outra, temos que:

$$\frac{xy}{2}+\frac{xy}{4}=2.(\frac{xy}{4}+y)\rightarrow x=8;\text{ 8 trabalhadores}$$

6 Atenda ao que se pede.

A Expresse o decimal periódico 0,256 363 63... na forma de fração $\frac{a}{b}$, a e b números naturais.

B Determine o valor da soma $\sum_{n=1}^{49}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

Solução

A $$0{,}256\ 363\ 63... = \frac{25}{100}+\frac{63}{10000}+\frac{63}{1000000}+...=\frac{25}{100}+\frac{\frac{63}{10000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{282}{1100}$$

B $$(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+...+(\frac{1}{49}-\frac{1}{50})=1-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}$$

7 Em 1731, Euler descobriu que a soma dos m primeiros termos da sequência $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$ é aproximadamente igual a $k + \ln m$, onde k é uma constante cuja aproximação com duas casas decimais é 0,58.

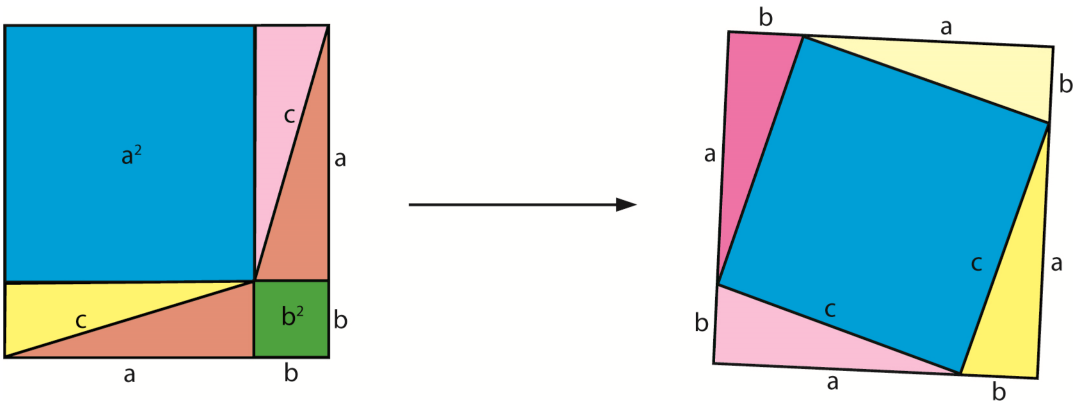
Calcule aproximadamente a soma dos 1 000 primeiros termos da sequência. Use, se necessário, as aproximações: $\ln 20 = 3$ e $\ln 2 = 0,7$. Observe que o número e é igual a 2,718... e que $y = \ln x$ se e somente se $e^y = x$, com x > 0.

Solução

$$S_{1000} \cong \ln 1000 + 0,58 = 3(\ln 20 - \ln 2) + 0,58 = 7,48$$

8 Atenda ao que se pede.

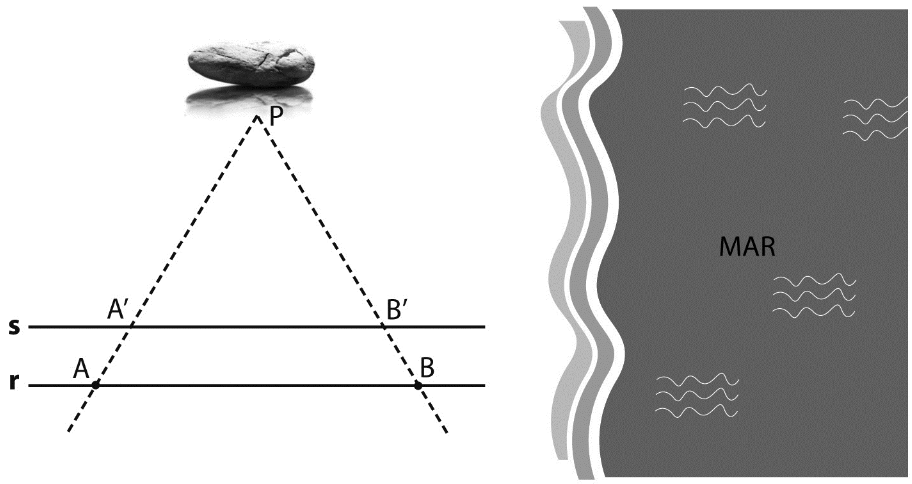
A "Ver é crer".
Os antigos matemáticos gregos viam as figuras como forma de compreender as suas demonstrações geométricas.
Observe as duas figuras abaixo e, através delas, demonstre o teorema de Pitágoras.



Solução

Do primeiro quadrado tiramos os quatro triângulos retângulos.
A área da figura que obtemos é igual a $a^2 + b^2$
Desenhamos o segundo quadrado. Mas posicionando os quatro triângulos retângulos deste outro modo.
Quando tiramos os quatro triângulos retângulos do segundo quadrado, obtemos uma figura cuja área é igual a c^2.
Portanto: $c^2 = a^2 + b^2$.

B Pedro está numa praia e quer calcular a distância entre um ponto *A* e uma pedra que está em um lugar inacessível.
Para isso, ele traça uma reta *r* que passa por *A* e uma paralela a ela, *s*.
De *A* observa *P* em uma linha reta que corta *s* em *A'*. Em outro ponto *B* de *r*, faz o mesmo e obtém o ponto *B'* em *s*.
Mede as distâncias $AB = 64$ m, $A'B' = 56$ m e $AA' = 8$ m.
Qual é a distância do ponto *A* à pedra?



Solução

O triângulo PAB' é semelhante ao triângulo PAB.

Considerando PA'= x, temos:

$$\frac{x}{x+8} = \frac{56}{64} \rightarrow x = 56$$

A distância do ponto A à pedra é igual a 56 + 8 = 64 m

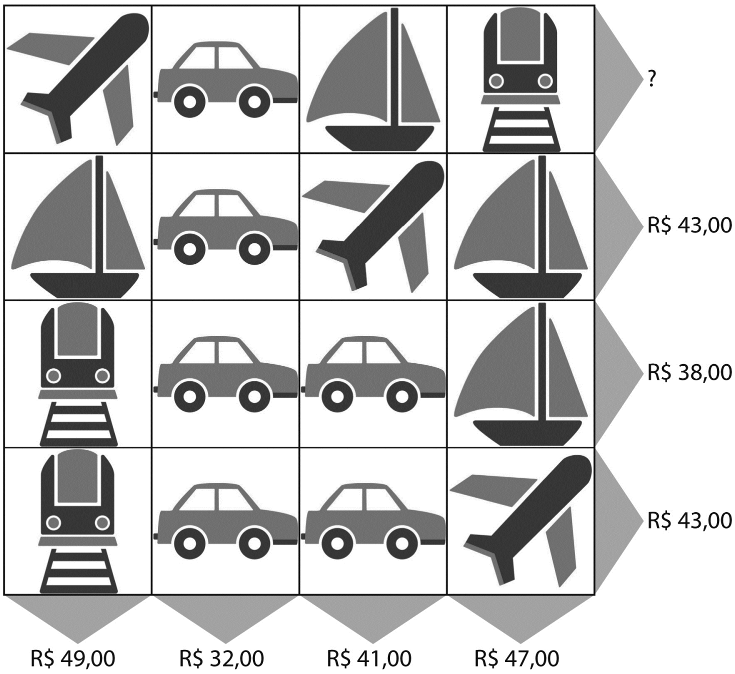
9 Atenda ao que se pede.

A Guilherme e Pedro jogam a final de um torneio de tênis. O campeão será o primeiro que conseguir vencer três *sets*. De quantas formas possíveis pode terminar a final?
Por exemplo: GGPPG significa que Guilherme venceu os dois primeiros *sets*, Pedro, os dois seguintes e Guilherme, o último.

Solução

Guilherme vence os três sets: GGG,
Guilherme vence 3 e Pedro, 1: GGPG, GPGG, PGGG;
Guilherme vence 3 e Pedro, 2: PPGGG, PGPGG, PGGPG, GPPGG, GPGPG, GGPPG;
(1+3+6) x 2 = 20
20 modos diferentes.

B Pedro foi a uma loja de brinquedos para comprar 1 avião, 1 carro, 1 barco e 1 trem. Quanto ele vai pagar por tudo isso? O valor indicado em cada linha e coluna é igual à soma dos preços dos 4 brinquedos da linha ou coluna.



Solução

Seja:

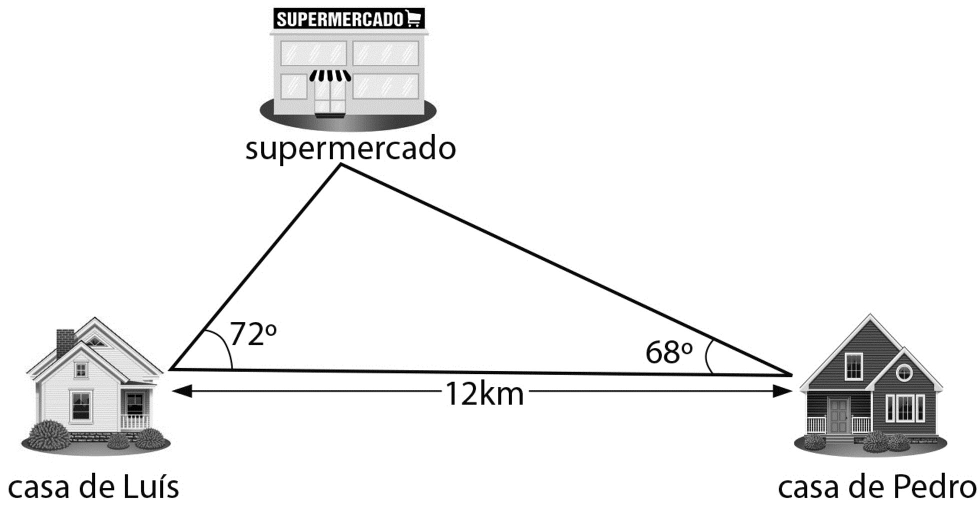
$a \rightarrow$ avião
$b \rightarrow$ barco
$c \rightarrow$ carro
$d \rightarrow$ trem

$$4c = 32 \rightarrow c = 8; \left\{\begin{matrix} b+a+2c=41 \\ 2b+c+a=43 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} b+a=25 \\ 2b+a=35 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$a=15 \quad e \quad b=10; \quad d=12; \quad 15+10+8+12=45$

Pedro pagará R$ 45,00.

10 A polícia já havia comprovado que o único supermercado da cidade fora arrombado entre 7h e 7h15min da manhã. A quantia de R$ 1895,00 havia sido roubada do caixa. Os únicos suspeitos eram dois seguranças do próprio supermercado: Luís e Pedro. Foram tomados seus depoimentos e um croqui foi feito:



1º suspeito: Luís
"Saí da minha casa para trabalhar às 6h20min. Fui de bicicleta, em linha reta, direto da minha casa ao supermercado. Vou, como todos os dias, a uma velocidade média de 18 km/h. Quando cheguei, vi a porta arrombada e muitos curiosos observando."

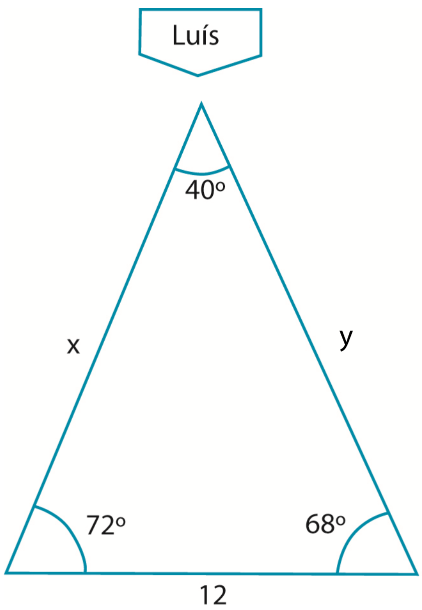
2º suspeito: Pedro
"Fui direto da minha casa ao supermercado, em linha reta, de bicicleta a uma velocidade média de 24 km/h. Saí da minha casa exatamente às 6h. Quando cheguei, vi a porta arrombada e o carro da polícia estacionado em frente."

Com base nos depoimentos e no croqui, descubra o provável culpado.

Use as aproximações que julgar convenientes:

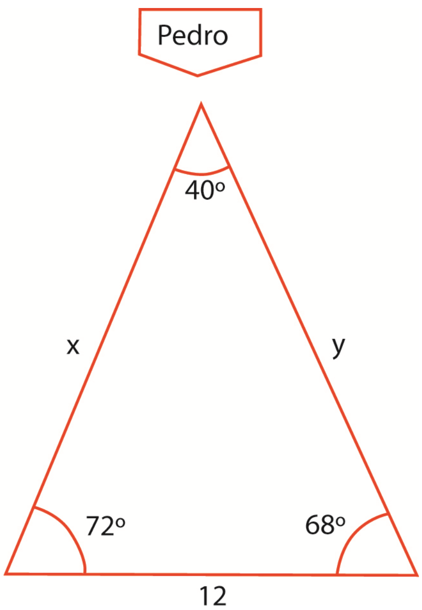
sen 40º = 0,6	sen 68º = 0,9	sen 72º = 0,9
cos 40º = 0,8	cos 68º = 0,4	cos 72º = 0,3
tg 40º = 0,8	tg 68º = 2,5	tg 72º = 3,1

Solução



$$\frac{12}{sen40^\circ} = \frac{x}{sen68^\circ} \rightarrow x \cong 18km$$

Luís chegou ao supermercado às 7h 20min, aproximadamente.



$$\frac{12}{sen40^\circ} = \frac{y}{sen72^\circ} \rightarrow y \cong 18km$$

Se Pedro foi a 24km/h, ele chegou ao supermercado antes das 7h.
Provavelmente, é ele o culpado.

Fim da Prova de Matemática Aplicada