

MATEMÁTICA APLICADA

- 1 Em um curso de graduação, 40% dos alunos estão no 2º período, 30% estão no 4º período, 20% estão no 6º período e os demais estão no 8º período. Na disciplina eletiva História da Matemática, estão inscritos 10% dos alunos do 2º período, 20% dos alunos do 4º período, 30% dos alunos do 6º período e 40% dos alunos do 8º período. Dos alunos inscritos na disciplina História da Matemática, qual é a porcentagem daqueles que são do 8º período?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Seja N o número de alunos desse curso de graduação, a quantidade de alunos por período e a quantidade de inscritos por período são:

2º período: $0,4N$ inscritos: $0,1 \times 0,4N = 0,04N$

4º período: $0,3N$ inscritos: $0,2 \times 0,3N = 0,06N$

6º período: $0,2N$ inscritos: $0,3 \times 0,2N = 0,06N$

8º período: $0,1N$ inscritos: $0,4 \times 0,1N = 0,04N$

Portanto, a porcentagem de inscritos que são do 8º período é $\frac{0,04N}{0,04N + 0,06N + 0,06N + 0,04N} = \frac{0,04N}{0,20N} = \frac{4}{20} = \frac{20}{100} = 20\%$.

MATEMÁTICA APLICADA

- 2 Ao somar as medidas dos ângulos internos de um polígono convexo, Arquimedes encontrou 2018° . Fazendo uma conferência dos seus cálculos, Arquimedes descobriu que havia esquecido de somar a medida de um dos ângulos.
- A Qual a medida, em graus, do ângulo que Arquimedes havia esquecido?
- B Quantos lados tinha o tal polígono?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $180^\circ (n - 2)$ e, portanto, sempre um múltiplo de 180° .

Assim, como $2018 = 180 \times 11 + 38$, Arquimedes esqueceu de somar um ângulo cuja medida é $180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$.

B A soma correta é, portanto, $2018^\circ + 142^\circ = 2160^\circ = 180^\circ \times 12$.

Logo, $n - 2 = 12 \Rightarrow n = 14$, isto é, o polígono tinha 14 lados.

MATEMÁTICA APLICADA

- 3 A lista $[5, 6, 35, 37, 38, 40, 41, 41, 48, 52]$ tem mediana $Q_2 = 39$ (segundo quartil), primeiro quartil $Q_1 = 35$ e terceiro quartil $Q_3 = 41$. O intervalo interquartil (IQ) da lista é definido como $IQ = Q_3 - Q_1$. Um *outlier* da lista é definido como um elemento da lista que é menor do que $Q_1 - 1,5 \times (IQ)$ ou maior do que $Q_3 + 1,5 \times (IQ)$. Determine os *outliers* da lista dada.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Tem-se: $IQ = Q_3 - Q_1 = 41 - 35 = 6$.

Assim, $Q_1 - 1,5 \times (IQ) = 35 - 1,5 \times 6 = 35 - 9 = 26$ e $Q_3 + 1,5 \times (IQ) = 41 + 1,5 \times 6 = 41 + 9 = 50$.

Logo, os outliers são 5, 6, e 52.

MATEMÁTICA APLICADA

4 Para quaisquer números reais a e b , com $b \neq 0$, definimos $resto(a, b) = a - b \times \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$, onde $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ significa o maior número inteiro que é menor ou igual

a $\frac{a}{b}$. Calcule:

A $resto(2018, 17)$;

B $resto\left(\frac{17}{8}, \frac{-3}{2}\right)$.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Tem-se: $\left\lfloor \frac{2018}{17} \right\rfloor = 118$. Assim: $resto(2018, 17) = 2018 - 17 \times 118 = 2018 - 2006 = 12$.

B Tem-se: $\left\lfloor \frac{\frac{17}{8}}{\frac{-3}{2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-34}{24} \right\rfloor = -2$. Assim: $resto\left(\frac{17}{8}, \frac{-3}{2}\right) = \frac{17}{8} - \left(\frac{-3}{2}\right) \times (-2) = \frac{17}{8} - 3 = \frac{17-24}{8} = \frac{-7}{8}$.

MATEMÁTICA APLICADA

- 5 Um fino pedaço de madeira, homogêneo e com espessura constante, tem o formato de um triângulo equilátero de lado 4 cm e pesa 20 gramas. Um outro pedaço da mesma madeira, com a mesma espessura e também homogêneo, tem o formato de um triângulo equilátero de lado 12 cm. Quanto pesa esse segundo pedaço de madeira?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Como os dois pedaços de madeira são homogêneos e têm a mesma espessura, seus pesos são proporcionais às áreas de suas bases. Como as bases são polígonos semelhantes (já que são triângulos equiláteros), a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão entre os lados dos triângulos.

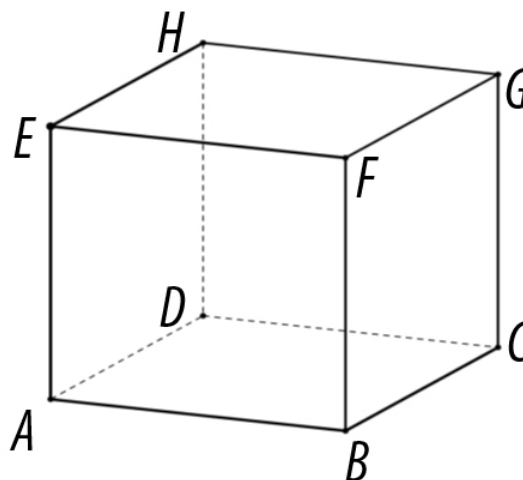
$$\text{Assim, } \frac{P_2}{P_1} = \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{12}{4} \right)^2 = 9 \Rightarrow P_2 = 9 \times P_1 = 9 \times 20 = 180 \text{ gramas.}$$

MATEMÁTICA APLICADA

- 6 Em cada um dos oito vértices de um cubo, é colocado um dos números inteiros de 1 a 8. Cada número é usado uma única vez e de tal forma que a soma dos números nos quatro vértices de cada face do cubo seja sempre a mesma soma S .

A Determine o valor de S .

B Há mais de uma maneira de colocar os números de 1 a 8 satisfazendo as restrições dadas. Fixando $A=3$, $B=8$ e $G=4$, mostre uma das maneiras de fazê-lo, associando os vértices C, D, E, F e H , na figura ao lado, aos números 1, 2, 5, 6 e 7 na ordem desejada.

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

A Como as somas dos números colocados nos vértices de cada face tem que ser sempre igual a S , então as somas dos números nas faces opostas $ABCD$ e $EFGH$ têm que ser iguais a S . Logo, deve-se ter $2S = A + B + C + D + E + F + G + H = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$. Assim, $S = 18$.

B Fixando $A=3$, $B=8$ e $G=4$, há duas maneiras de numerar os vértices restantes:
 $C=1, D=6, E=2, F=5, H=7$ ou $C=5, D=2, E=6, F=1, H=7$

MATEMÁTICA APLICADA

- 7 Considere um segmento de reta AB de comprimento igual a 4 cm, no espaço tridimensional. Calcule o volume do sólido formado por todos os pontos do espaço tridimensional cuja distância ao segmento AB é no máximo 2 cm.

OBS.: Dados um segmento de reta AB e um ponto P do espaço tridimensional, define-se a distância de P ao segmento AB como sendo a distância de P ao ponto do segmento AB que está mais próximo de P .

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

O sólido descrito no enunciado é a união de um cilindro reto com raio da base igual a 2 cm e altura igual a 4 cm com duas semiesferas de bases coincidentes com as bases do cilindro, isto é, duas semiesferas de raio 2 cm.

Logo, o volume pedido é igual ao volume do cilindro (área da base vezes a altura) mais o volume de uma esfera (duas semiesferas).

$$\text{Tem-se: } V = \pi r^2 h + \frac{4\pi r^3}{3} = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 + \frac{4 \cdot \pi \cdot 2^3}{3} = 16\pi + \frac{32\pi}{3} = \frac{80\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

MATEMÁTICA APLICADA

8 Considere uma função f , definida no conjunto dos inteiros positivos, tal que:

- $f(1)=1$;
- $f(n)=2f(n-1)+1$, se n é par;
- $f(n)=f(n-2)+3$, se n é ímpar maior do que 1.

A Calcule $f(2017)$.

B Calcule $f(2018)$.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Tem-se:

$$f(1)=1$$

$$f(3)=f(1)+3=4$$

$$f(5)=f(3)+3=7$$

$$f(7)=f(5)+3=10$$

...

Assim, a sequência dos valores de f para n ímpar forma uma PA de primeiro termo igual a 1 e razão igual a 3.

$f(2017)$ é o termo de ordem $(2017+1)/2=1009$ dessa PA.

Logo: $f(2017)=1+(1009-1)\times 3=1+3024=3025$.

B Tem-se: $f(2018)=2f(2017)+1=6050+1=6051$.

MATEMÁTICA APLICADA

- 9 Considere os conjuntos $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$ e $C=\{2,3,4,5,6\}$.

Como se sabe, o conjunto A tem ao todo $2^6 = 64$ subconjuntos. Determine quantos são os subconjuntos de A que **NÃO SÃO** subconjuntos nem de B nem de C .

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Para que um subconjunto de A não seja subconjunto de B , um de seus elementos terá que ser obrigatoriamente o "6" e para que um subconjunto de A não seja subconjunto de C , um de seus elementos terá que ser obrigatoriamente o "1".

Assim, os subconjuntos de A que não são subconjuntos de B nem de C são aqueles que têm os números "1" e "6" como elementos, obrigatoriamente.

São eles:

i) Subconjuntos com dois elementos: somente $\{1,6\}$;

ii) Subconjuntos com três elementos: $\{1,6, _ \}$. Há $C_4^1 = 4$ escolhas para o terceiro elemento;

iii) Subconjuntos com quatro elementos: $\{1,6, _, _ \}$. Há $C_4^2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ escolhas para os outros dois elementos;

iv) Subconjuntos com cinco elementos: $\{1,6, _, _, _ \}$. Há $C_4^3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$ escolhas para os outros três elementos;

v) Subconjuntos com seis elementos: só há o próprio conjunto A .

São, portanto, ao todo: subconjuntos de A que não são subconjuntos nem de B nem de C .

OUTRA RESOLUÇÃO

Uma vez concluído que os subconjuntos de A que nos interessam são aqueles que têm obrigatoriamente os elementos "1" e "6", basta observar que, agora, temos duas escolhas para cada um dos outros quatro elementos: cada um deles será ou não elemento do subconjunto. Tem-se, assim, pelo Princípio Multiplicativo:

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ escolhas e, portanto, 16 subconjuntos.

MATEMÁTICA APLICADA

- 10 Considere a região triangular de vértices $A=(0,0)$, $B=(10,0)$ e $C=(6,8)$. Um ponto dessa região é sorteado ao acaso, de modo que a probabilidade de o ponto sorteado estar em uma dada região é proporcional à área dessa região. Calcule a probabilidade de o ponto sorteado estar mais próximo do vértice B do que dos vértices A e C .

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Propriedade: dados dois pontos distintos A e B do plano, a mediatriz do segmento AB divide o plano em duas regiões:

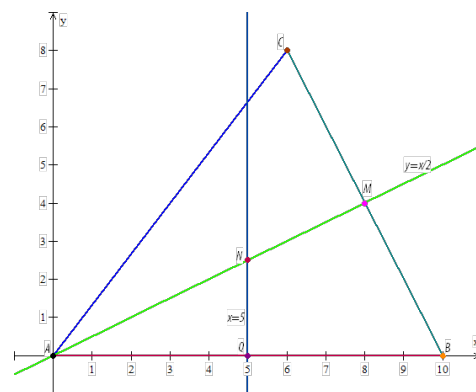
- a que contém o ponto A e todos os pontos do plano que estão mais próximos de A do que de B ;
- a que contém o ponto B e todos os pontos do plano que estão mais próximos de B do que de A .

A figura ao lado mostra a região triangular ABC e a região $BMNQ$ dos pontos da região triangular ABC que estão mais próximos de B do que de A e de C :

A probabilidade pedida é a razão entre a área da região $BMNQ$ e a área da região triangular ABC .

A área da região triangular ABC é $\frac{10 \times 8}{2} = 40$.

O ponto M , médio de BC , tem coordenadas $(8,4)$ e o ponto Q , médio de AB , tem coordenadas $(5,0)$.



A reta que contém o segmento BC tem coeficiente angular $\frac{0-8}{10-6} = -2$. Assim, a mediatriz do segmento BC tem coeficiente angular $\frac{1}{2}$, e sua equação é

$y-4 = \frac{1}{2}(x-8) \Rightarrow y = \frac{x}{2}$. Portanto, o ponto N tem coordenadas $(5, \frac{5}{2})$.

A área do quadrilátero $BMNQ$ é, portanto, $\frac{(\frac{5}{2}+4) \times 3}{2} + \frac{2 \times 4}{2} = \frac{39}{4} + 4 = \frac{55}{4}$.

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{\frac{55}{4}}{40} = \frac{11}{32}$.